

# Corso di Teoria dei Segnali

## a.a. 2010-2011

Esercitazione n. 1 – Sviluppo in serie e trasformata di Fourier

## SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

OGNI SEGNALE REALE E PERIODICO:

I)

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

SVILUPPO  
IN SERIE  
DI F.  
IN FORMA  
REALE

E

II)

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

SVILUPPO IN  
SERIE DI F.  
IN FORMA  
COMPLESSA

VALIDA ANCHE SE  $x(t)$  È COMPLESSA  
(DOPO OPPORTUNE MODIFICHE)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

IL NUMERO DI TERMINI DA SOMMARE È  $\infty$  MA IL PESO A PARTIRE DA UN CERTO PUNTO IN POI È TRASCURABILE (O NULLO).

$$\text{III)} \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)]$$

SVILUPPO IN  
SERIE DI F.  
IN FORMA  
RETTANGOLARE

$$a_k = \operatorname{Re} \{X_k\} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

$$b_k = \operatorname{Im} \{X_k\} = -\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

ESEMPIO) (1)

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow T_0 = 1/f_0$$

UTILIZZANDO LA I)

$$a \cos(2\pi f_0 t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

(1)



$$A_0 = 0 \xrightarrow{\text{GEN}} A_k = 0 \quad \forall k \neq 1 \Rightarrow a \cos(2\pi f_0 t) = 2 \cdot A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1)$$

$$\theta_k = 0 \quad \forall k$$

$$\Downarrow$$

$$a \cos(2\pi f_0 t) = 2 A_1 \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\Leftrightarrow A_1 = \frac{a}{2}$$

PER PASSARE ALLA FORMA II RICORDIAMO CHE

$$k > 1 \quad X_k \triangleq A_k e^{j\theta_k} \quad X_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$

$$k \leq -1 \quad X_k \triangleq A_{-k} e^{-j\theta_{-k}} \quad X_1 = A_1 = \frac{a}{2} \quad (\theta_1 = 0)$$

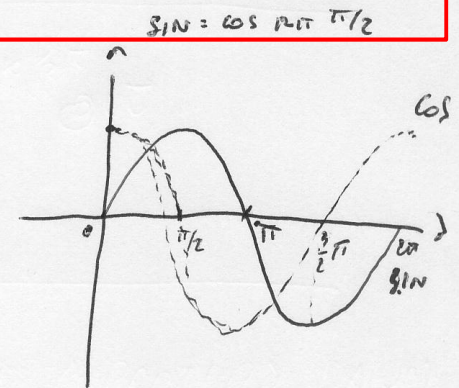
$$X_{-1} = A_1 = \frac{a}{2} \quad (\theta_{-1} = 0)$$

ES. PER CASA : VALUTARE I COEFFICIENTI PER LA FORMA III, RICORDANDO CHE  $a_k = \operatorname{Re}\{X_k\}$  E  $b_k = \operatorname{Im}\{X_k\}$

ESEMPLO 1) (2)

$$x(t) = a \sin(2\pi f_0 t) = a \cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$$

COME PER IL CASO PRECEDENTE

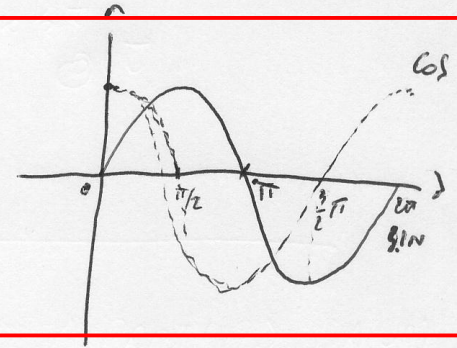


$$a \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$



ESSEMPIO 1) (2)

$$x(t) = a \sin(2\pi f t) = a \cos(2\pi f t - \pi/2)$$



COME PER IL CASO PRECEDENTE

$$a \cos(2\pi f t - \pi/2) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f t + \theta_k)$$

DA CUI:

$$A_0 = 0 \quad A_k = 0 \quad \forall k \neq 1 \quad \theta_1 = -\pi/2 \quad \text{NONA}$$
$$\theta_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$

$$a \cos(2\pi f t - \pi/2) = 2 A_1 \cos(2\pi f t - \pi/2) \quad A_1 = \frac{a}{2}$$

PER LA FORMA II

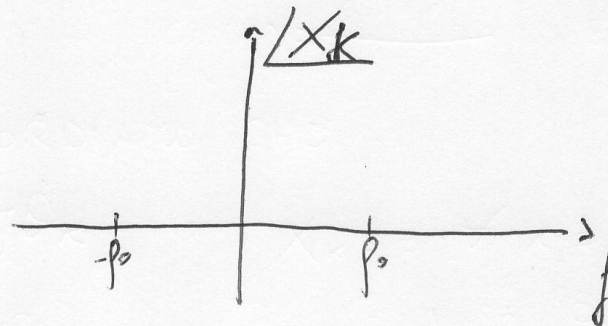
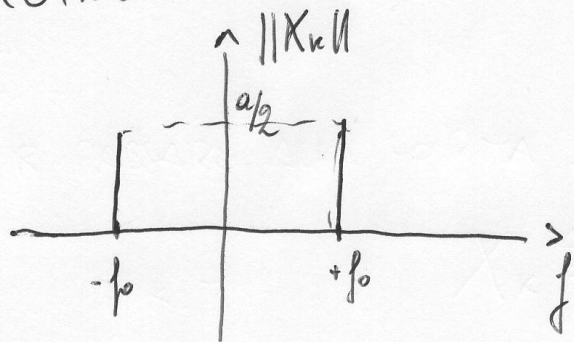
$$X_1 = \frac{a}{2} e^{-j\pi/2} \quad X_{-1} = \frac{a}{2} e^{j\pi/2} \quad X_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1$$

È BUONA NORMA STUDIARE  $\|X_k\|$  E  $\angle X_k$  PER ANALIZZARE LE  
ANALISI CHE DEL SEGNALE OSSERVATO, PER CUI:

CASO ESSEMPIO 1)

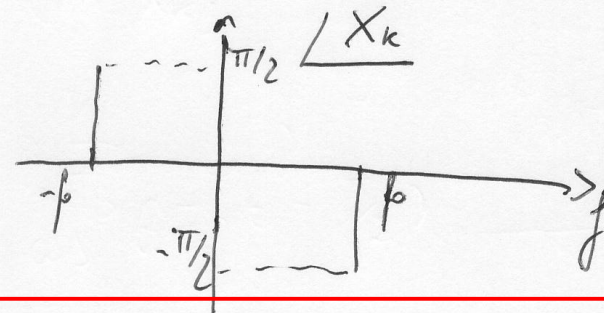
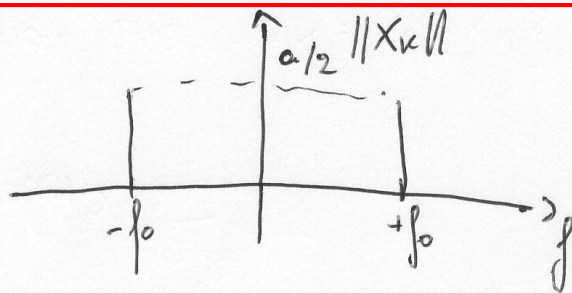
$$X_1 = \frac{a}{2} \quad X_{-1} = \frac{a}{2} \quad X_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1$$

QUINDI



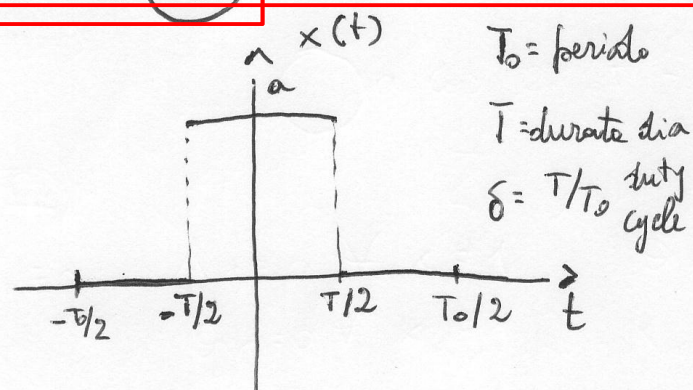
CASO ESSEMPIO 2)

$$X_1 = \frac{a}{2} e^{-j\pi/2} \quad X_{-1} = \frac{a}{2} e^{j\pi/2}$$





# ESEMPIO (3)



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{-T/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \int_{T/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \Rightarrow$$

$\text{"0 per } x(t)=0$

$$\Rightarrow X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} a \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$\left\{ \int_b^c e^{ax} dx = \frac{1}{a} [e^{ax}]_b^c \right\} \Rightarrow$$



$$X_k = \frac{1}{T_0} \cdot a \cdot \left[ \frac{e^{-j2\pi k f t}}{(-j2\pi k f)} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{a}{T_0} \cdot \left[ \frac{e^{-j2\pi k f T/2} - e^{j2\pi k f T/2}}{(-j2\pi k f)} \right] =$$

$$= \frac{a}{T_0} \left[ \frac{e^{j\pi k f T} - e^{-j\pi k f T}}{2j \cdot \pi k f} \right] = \frac{a}{T_0} \frac{\sin(\pi k f T)}{\pi k f}$$

$$= \frac{a}{T_0} \cdot \frac{T}{T} \cdot \frac{\sin(\pi k f T)}{\pi k f} = \frac{a T}{T_0} \cdot \frac{\sin(\pi k f T)}{\pi k f T} \triangleq \frac{a T}{T_0} \operatorname{sinc}(\pi k f T)$$

(seno normalizzato)

$$= a \delta \operatorname{sinc}(\pi k \delta)$$

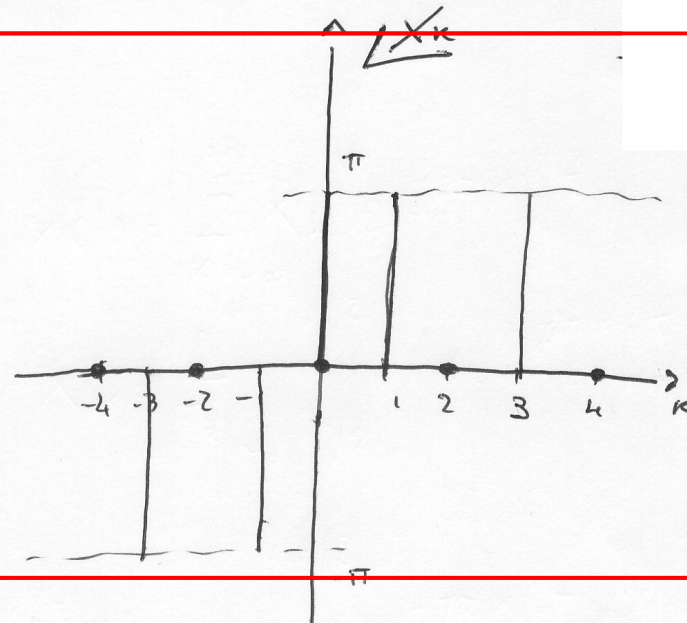
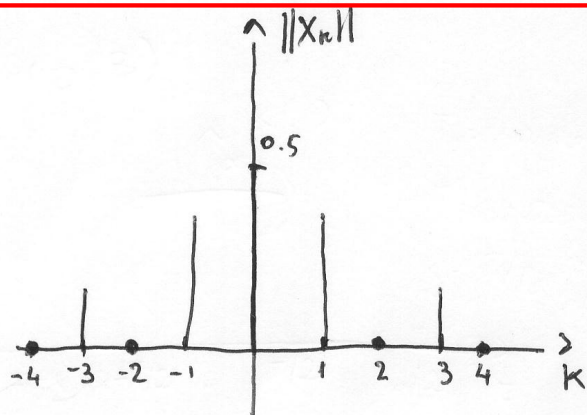
↑  
presente  
o meno

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (\text{normalizzato})$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (\text{non "})$$

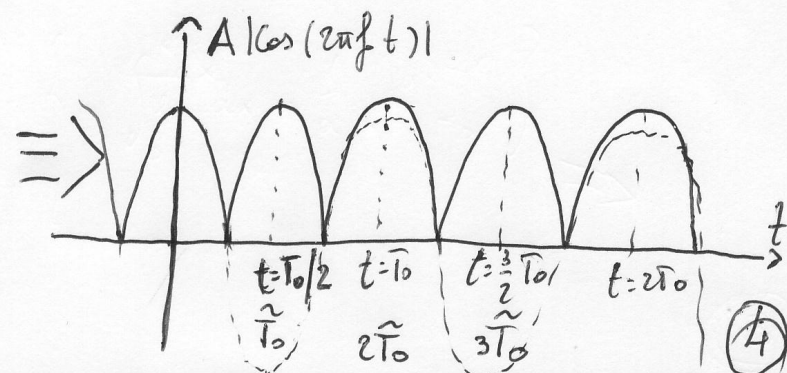
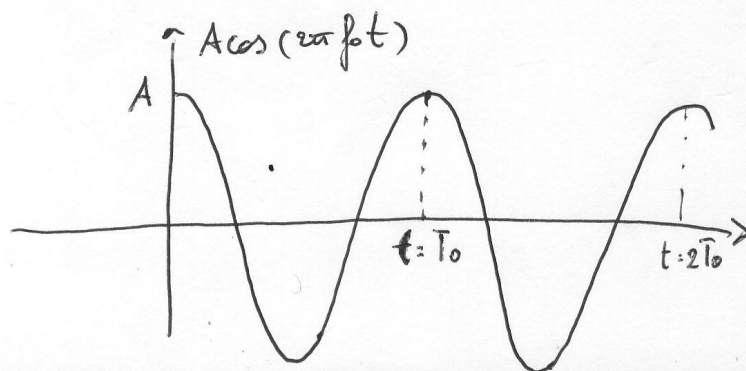
Per conservarne i use lo  $\operatorname{sinc}$  normalizzato per cui  $X_k = a \delta \operatorname{sinc}(k \delta)$

Poiché  $x(t)$  è pari (simmetrica rispetto all'asse  $y$ , cioè  $x(t) = x(-t)$ ),  
 allora  $X_k = X_{-k}$ . FISSATI  $\delta = 0.5$  e  $a = 1 \Rightarrow X_k = 0.5 \sin(0.5k)$



### ESEMPIO (5)

$$x(t) = A |\cos(2\pi f_0 t)| \quad A > 0 \quad T_0 = 1/f_0$$





RICORDANDO CHE:

$$\int \cos dx e^{\beta x} dx = \frac{\frac{1}{\alpha} e^{\beta x} \left[ \sin dx + \frac{\beta}{\alpha} \cos dx \right]}{(1 + \beta^2/\alpha^2)} + c$$

ALLORA:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

VEDIAMO LE ESPRESSIONI DI  $X_k$ :

PER LA PRESENZA di  $1 \dots 1$   $\tilde{T}_0 = \frac{1}{2f_0}$

QUINDI:

$$X_k = \frac{1}{\tilde{T}_0} \int_{-\tilde{T}_0/2}^{\tilde{T}_0/2} A \cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi k f_0 t} dt, \text{ PONIAMO:}$$

$$\gamma = \frac{A}{\tilde{T}_0} = 2A f_0 \quad \alpha = 2\pi f_0 \quad \beta = -j2\pi k f_0 \quad \text{e ha:}$$

$$X_k = \gamma \int_{-\tilde{T}_0/2}^{\tilde{T}_0/2} \cos \alpha t e^{\beta t} dt \quad \Rightarrow$$



$$X_{\kappa} = \gamma \left[ \frac{\frac{1}{\alpha} \cdot e^{\beta x} \cdot (\sin \alpha x + \frac{\beta}{\alpha} \cos \alpha x)}{(1 + \beta^2/\alpha^2)} + e \right] \begin{matrix} \tilde{T}_0/2 \\ -\tilde{T}_0/2 \end{matrix} =$$

$$\gamma \left[ \frac{\frac{e^{\beta \tilde{T}_0/2}}{\alpha} \cdot (\sin \alpha \tilde{T}_0/2 + \beta/\alpha \cos \alpha \tilde{T}_0/2)}{(1 + \beta^2/\alpha^2)} - \frac{e^{-\beta \tilde{T}_0/2}}{\alpha} \cdot (\sin \alpha \tilde{T}_0/2 + \beta/\alpha \cos \alpha \tilde{T}_0/2) \right]$$

#### 1.4 Trasformata di Fourier

Il valore di tensione (o di corrente) all'interno di un circuito varia in funzione del tempo, di conseguenza risulta d'interesse lo studio delle frequenze presenti nel circuito. Teoricamente, per valutare le frequenze presenti, bisogna analizzare la f. d'o. su tutti i tempi ( $-\infty < t < +\infty$ ) in modo da non dimenticare alcuna componente frequenziale. Il livello relativo di ogni componente rispetto alle altre è dato dallo spettro delle tensioni (o delle correnti). Esso può essere ottenuto utilizzando la **trasformata di Fourier** della f. d'o.:

DATA la f. d'o.  $g(t)$ :

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Il simbolo  $\mathcal{F}$  è usato ×  
indicare l'operazione  
di trasformazione e nell'  
integrale si introduce  $f$   
come variabile della trasf.

Il risultato di questa operazione è uno spettro bilatero (a due lati), poiché dalla formula si ottengono componenti frequenziali sia negative che positive: la trasformata è il risultato di un calcolo matematico e non è fisicamente presente in alcun punto del sistema. In generale, poiché  $e^{-j2\pi ft}$  è complesso, anche  $G(f)$  lo sarà, per cui potremo scrivere  $G(f) = X(f) + jY(f)$  in forma cartesiana o, in forma polare,  $G(f) = |G(f)| e^{j\theta(f)}$ , dove  $|G(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)}$  e  $\theta(f) = \arctan(Y(f)/X(f))$ . Ad esempio, diremo che la frequenza  $f = 10\text{Hz}$  è presente nella f. d'o.  $g(t)$  se  $|G(10)| \neq 0$ .



La trasformata inversa (o anti-trasformata) è:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$G(f)$  e  $g(t)$  costituiscono una coppia di trasformate di Fourier.

Una f. d'o.  $g(t)$  è trasformabile secondo Fourier se soddisfa entrambe le condizioni di **Dirichlet**:

1)  $g(t)$  è assolutamente integrabile, ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$$

2)  $g(t)$  ha un numero finito di discontinuità con valori di limite destro e limite sinistro finiti, e un numero finito di massimi e minimi in un intervallo finito di tempo.

Queste sono entrambe condizioni sufficienti ma non necessarie; una condizione sufficiente più restrittiva per l'esistenza della trasformata di F. è:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$



Il calcolo della TF secondo la definizione può essere difficile, ma vi sono alcune tecniche alternative che spesso aiutano nello scopo (integrazione diretta, tabella, teoremi e proprietà).

### PROPRIETA' DELLA TRASFORMATTA DI FOURIER

- x - linearità:  $a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$  ;
- x - simmetria spettrale dei segnali reali : se  $g(t)$  è reale  $\rightarrow G(-f) = G^*(f)$ ;

DIM:

$$G(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2j\pi(-f)t} dt \quad e \quad G^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) e^{-2j\pi f t}]^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t) e^{2j\pi f t} dt$$

ma  $g^*(t) = g(t)$   
poiché  $g(t)$  reale

- x - Corollario:  
 $|G(-f)| = |G(f)|$  lo spettro dei moduli è pari  
 $\theta(-f) = -\theta(f)$  lo spettro delle fasi è dispari

→ - cambiamento di scala:  $F[g(at)] = (1/|a|)G(f/a)$ ;

- dualità:  $G(t) \leftrightarrow g(-f)$  ;

x - traslazione temporale:  $g(t-T_d) \leftrightarrow G(f)e^{-j2\pi f T_d}$

x - traslazione frequenziale:  $g(t)e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow G(f-f_c)$

- area di  $g(t)$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = G(0)$

- area di  $G(f)$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = g(0)$

x - derivazione nel dominio del tempo:  $d^n g(t)/dt^n \rightarrow (2\pi j f)^n G(f)$  con  $G(0)=0$ ;

x - integrazione nel dominio del tempo:  $\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{2j\pi f} G(f) + \frac{1}{2} G(0) \delta(f)$

x - coniugazione:  $g^*(t) \rightarrow G^*(-f)$ ;

... moltiplicazione:  $g_1(t)g_2(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)G_2(f-\lambda)d\lambda = G_1(f) \otimes G_2(f)$

$x$  - moltiplicazione:  $g_1(t)g_2(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda)G_2(f-\lambda)d\lambda = G_1(f) \otimes G_2(f)$

$x$  - convoluzione:  $g_1(t) \oplus g_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda)g_2(t-\lambda)d\lambda \rightarrow G_1(f)G_2(f)$

-  $g(t)$  pari  $\rightarrow G(f)$  è reale;

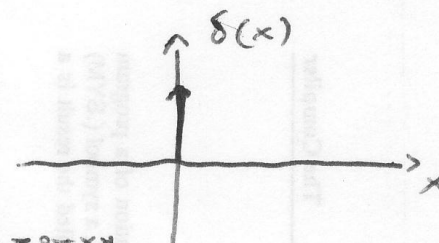
-  $g(t)$  dispari  $\rightarrow G(f)$  è immaginaria.

## TRASFORMATE DI FOURIER NOTEVOLI:

### (1) DELTA DI DIRAC $\delta(x)$ :

$$\delta(x) \triangleq \begin{cases} \infty & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

e vale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$



alternativamente  $\delta(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j2\pi xy} dy$

Sia  $w(x)$  una generica funzione continua in  $x=0$ , allora vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\delta(x)dx = w(0), \text{ da cui deriva la proprietà campionatrice della } \delta:$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\delta(x-x_0)dx = w(x_0),$$

utile quando si devono estrarre campioni da una data funzione, da queste proprietà è immediato il calcolo delle  $\mathcal{F}[\delta(t)]$ :